

文章编号:1000-8055(2013)11-2593-07

基于升速响应信息柔性转子系统的多阶 多平面瞬态动平衡方法

岳 聪¹, 任兴民¹, 邓旺群², 杨永锋¹

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院 振动工程研究所, 西安 710072;

2. 中国航空工业集团公司 中国航空动力机械研究所, 湖南 株洲 412002)

摘 要: 利用升速响应信息进行柔性转子多阶、多平面瞬态动平衡方法研究. 在提出柔性转子越过各阶临界转速时平衡校正量最优值算法的基础上, 建立了以 3 次起车即可实现同时抑制多阶不平衡达到整体平衡的方法. 通过所提出的平衡方法分别对双盘转子模型前 2 阶不平衡和三盘转子模型前 3 阶不平衡进行动平衡仿真研究, 结果显示: 该方法能在整体上有效控制转子系统的振幅波动, 越过临界转速时的振幅减幅率普遍在 80% 左右, 最低可达到 60% 以上.

关 键 词: 升速响应; 柔性转子; 模态平衡; 加速过程; 不平衡识别

中图分类号: V231.96; TH113.1

文献标志码: A

Multi-plane and multi-critical transient dynamic balance method based on rising speed response information of flexible rotor system

YUE Cong¹, REN Xing-min¹, DENG Wang-qun², YANG Yong-feng¹

(1. Institute of Vibration Engineering, School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. China Aviation Dynamical Machinery Research Institute,
Aviation Industry Corporation of China, Zhuzhou Hunan 412002, China)

Abstract: A multi-plane and multi-critical transient dynamic balance method was proposed by rising speed response information of flexible rotor. The flexible rotor multi-critical speed balance correction quantity under the optimal algorithm was put forward. The overall balance can be realized by imbalance information of three times rise-critical-speed re-sponse to suppress multi-critical amount of unbalance simultaneously. Numerical simulation with dynamic balance method applies to two-disk rotor model of two-critical unbalance and three-disk rotor model of three-critical unbalance, respectively. The results show that the method could effectively control the amplitude fluctuation of whole rotor system while decreasing critical speed amplitude rate up to 60%—80%.

Key words: rising speed response; flexible rotor; modal balancing; accelerate process; unbalance identification

旋转机械正向着更高速、更高效、更轻便、更精密的方向发展. 这就使得航空发动机等旋转机

收稿日期: 2012-10-11

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20131105.1002.025.html>

基金项目: 国家自然科学基金(11272257); 航空科学基金(20112108001); 陕西省自然科学基金基础研究计划(JC201242)

作者简介: 岳聪(1987—), 男, 浙江嘉兴人, 博士生, 主要从事转子动力学方面研究. E-mail: yuecong234@163.com

械常在高于前2阶临界转速下工作,与此同时产生了更大的振动问题.旋转机械振动产生的原因是多方面的,而不平衡是最重要的影响因素.尽管完全消除不平衡量是不现实的,但是把振动幅值控制在机械安全运行条件下是必要的.

传统的平衡方法都是在定转速下进行的^[1-2],属稳态平衡方法,且需要专门的平衡设备,但在现场平衡时,这些方法费时费力,有时可能无法实现,因此,建立一种适用于现场动平衡的瞬态动平衡方法是非常必要的.为满足实际工况下柔性转子的平衡,国内外学者提出了许多柔性转子平衡方法^[3-6].其中比较典型的是Den Hartog^[7]以及随后的Blake, Carlson等^[8-9]提出并完善的三圆平衡法.徐芳麟等^[10]介绍了可以只通过3次起车便能完成一次转子不平衡量的识别的三圆平衡法.只需要在不同位置添加2次试重启动转子,通过判断轻点位置来识别转子初始不平衡量的单面平衡法.在此平衡方法研究的基础上, Rodrigues等^[11]探讨了对称裂纹转子的双面瞬态平衡法;黄金平等^[12]将三圆平衡法与转子升速响应下的模态信息结合起来,探讨了基于加速响应信息的柔性转子前2阶的动平衡方法.该方法虽然在临界区的振幅平衡控制得很好,但由于没有考虑平衡试重添加后新的不平衡对转子系统的影响,在过2阶的稳定区后开始出现振幅加大的现象.

本文在传统稳态平衡法基础上,以改进的三圆平衡法为基本平衡方法,考虑升速响应下平衡试重对柔性转子系统的动平衡影响,提出只通过3次起车,利用升速响应的模态特征量对柔性转子进行前 n 阶模态平衡的动平衡方法,并分别通过对双盘模型和三盘模型进行数值仿真来验证该方法的有效性.

1 平衡方法

1.1 平衡理论

针对考虑各向同性,支承为刚性支承,不平衡量只存在于 N 个轮盘上的线性转子系统运动微分方程式(1)^[13],利用其升速响应振幅信息进行动平衡.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (1)$$

其中位移矩阵

$$\mathbf{D} = [x_1, \beta_1, y_1, \alpha_1, \dots, x_N, \beta_N, y_N, \alpha_N]^T$$

质量矩阵

$$\mathbf{M} =$$

$$\text{diag}(m_1, I_{d_1}, m_1, I_{p_1}, \dots, m_N, I_{d_N}, m_N, I_{p_N})$$

$\mathbf{C}$ 为系统的阻尼矩阵, $\mathbf{K}$ 为刚度矩阵.

瞬时不平衡激振力

$$\mathbf{F}_{4N \times 1} =$$

$$[F_{x,1} \ 0 \ F_{y,1} \ 0 \ \dots \ F_{x,N} \ 0 \ F_{y,N} \ 0]^T$$

$$F_{x,i} = m_i e_i \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \phi_0) + m_i e_i \ddot{\phi} \sin(\phi + \phi_0)$$

$$F_{y,i} = m_i e_i \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \phi_0) - m_i e_i \ddot{\phi} \cos(\phi + \phi_0)$$

上式中 m_i 为各盘质量, e_i 为各盘偏心距, I_{p_i} 为各盘极转动惯量, $\dot{\phi}$ 是转子系统瞬时转速, $\ddot{\phi}$ 为角常加速度, ϕ_0 是初始角度.

为实现上述柔性转子模型的前 n 阶模态平衡,首先需要得到 m 个测量面上的前 n 阶振型,而各阶临界转速上的振动峰值能很好地反映各阶振型变化,故本文的不平衡校正量取值选择在临界转速的振动峰值.

设得到的不平衡量 $\mathbf{U}_{ij}$ (平衡面 $i = 1, 2, \dots, m$, 平衡阶数 $j = 1, 2, \dots, n$, 其中 $m \geq n$, 已知大小和方向) 以及相应的影响系数.若要使柔性转子前 n 阶完全平衡几乎不能做到.为此,本文希望通过找到各阶对应的平衡试重 $\mathbf{r}_{ij}$ (方向与 $\mathbf{U}_{ij}$ 相同,大小未知),使得残余平衡试重 $\mathbf{W}_{ij}$ 找到最优解.

$$\mathbf{W}_{ij} = \left\| \mathbf{U}_{ij} - \mathbf{r}_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mathbf{r}_{ik} \right\|$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

对式(2)取2范数,则有

$$W_{ij} = \sqrt{(\mathbf{U}_{ij} - \mathbf{r}_{ij})^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mathbf{r}_{ik})^2}$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

此时式(3)满足

$$\sqrt{(\mathbf{U}_{ij} - \mathbf{r}_{ij})^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mathbf{r}_{ik})^2} \geq$$

$$\sqrt{2 \left[\sum_{\substack{p=1, q=1 \\ p > q \\ p \neq q \neq j}}^n (\mathbf{r}_{ip} \mathbf{r}_{iq}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (|\mathbf{U}_{ij} - \mathbf{r}_{ij}| \cdot |\mathbf{r}_{ik}|) \right]} \quad (4)$$

当且仅当 $|\mathbf{U}_{ij} - \mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_{ik}|$, ($k = 1, 2, \dots, n$, 其中 $k \neq j$) 时,式(4)取得右端的最小值.若使式(2)同时成立,即平衡面 i 的前 n 阶总的不平衡量同时达到最小值,令

$$\begin{cases} |\mathbf{U}_{i1} - \mathbf{r}_{i1}| = |\mathbf{r}_{ik_1}| \\ |\mathbf{U}_{i2} - \mathbf{r}_{i2}| = |\mathbf{r}_{ik_2}| \\ |\mathbf{U}_{ij} - \mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_{ik_j}| \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad k_j \neq j \quad (5)$$

通过解式(5),可求得平衡面 i 的前 n 阶总的不平衡量达到最小值时所对应的 $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}$ 的大小

$$\begin{aligned} & |r_{i1}| + |r_{i2}| + \dots + |r_{in}| = \\ & (|U_{i1}| + |U_{i2}| + \dots + |U_{in}|)/n \quad (6) \end{aligned}$$

考虑到各阶振型的正交性,即不同阶的振型只由该阶的不平衡量所引起,故可求得式(6)的解为

$$|r_{ij}| = |U_{ij}|/n \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

由于 r_{i1}, r_{i2} 的方向已确定,即可求得对应平衡面各阶平衡校正量的最优解。

图 1 为柔性转子前 3 阶振型示意图,图中 $\varepsilon(z)e^{i\alpha_i}(z)$ 为某一转速下,整个转子系统各点的振型函数, C_i 为 i 阶振型系数, α_i 为 i 阶振型模式的分布角度($i=1, 2, 3$)。

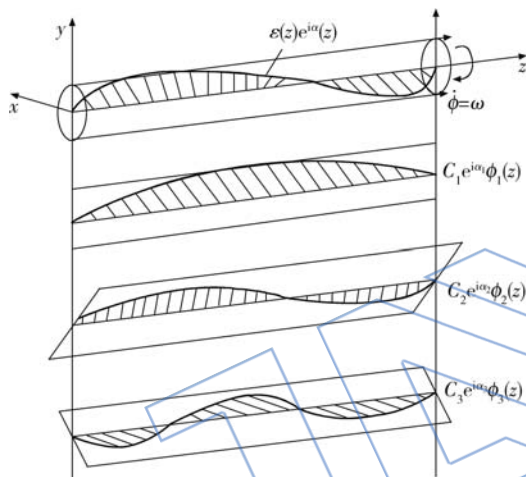


图 1 柔性转子前 3 阶振型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of flexible rotor three-critical vibration mode

1.2 利用升速响应振幅进行模态平衡

基于上述三圆平衡法以及求得临界峰值下校正量的最优解,只需要通过转子系统以相同条件 3 次过前 2 阶临界转速起车,即可完成升速响应下柔性转子瞬态动平衡。下面以线性转子系统平衡前 2 阶的过程为例来说明该平衡方法:

1) 起动转子,使其快速通过前 2 阶临界区并记录测量平面和平衡平面的振动幅值。在 1 阶共振区内两测量面、两平衡面处测得的共振峰值分别记为: $R_{0I1}, R_{0II1}, R_{011}$ 和 R_{021} ; 2 阶共振区内的共振峰值分别记为: $R_{0I2}, R_{0II2}, R_{012}$ 和 R_{022} 。

2) 选择合适的平衡试重组(T_1, T_2)分别加于两平衡面上。再次以相同的工况起动转子,使其通过前 2 阶临界区。用与步骤 1) 中相同的方法测得左右端测量面处的前 2 阶共振峰值($R_{1I1},$

R_{1I2})和(R_{1II1}, R_{1II2})。

3) 将试重组(T_1, T_2)逆时针转过 120° ,重复步骤 2),得到左右端测量面处前 2 阶共振峰值(R_{2I1}, R_{2I2})和(R_{2II1}, R_{2II2})。

4) 分别以 $R_{0I1}e^{0i}, R_{0II1}e^{2\pi i/3}$ 为圆心,以 R_{1I1}, R_{2I1} 半径画圆。通过文献[8]得到轻点位置 M。

5) 将从原点到步骤 4) 中轻点 M 的矢量记为 $a_{11} + b_{11}i$,可求得平衡面 I 处振型的 1 阶模态影响系数为 $I_{11} = (-a_{11} + b_{11}i)/T_1$ 。同理,可求得平衡面 II 处振型的 1 阶模态影响系数 $I_{21} = (-a_{21} + b_{21}i)/T_2$

6) 求取 1 阶模态平衡校正量(U_{11}, U_{21})

$$U_{11} = R_{0I1}/I_{11} \quad U_{21} = R_{0II1}/I_{21}$$

7) 重复式(5)~式(6)求得 2 阶模态校正量(U_{12}, U_{22})

$$U_{12} = -R_{0I2}/I_{12} \quad U_{22} = -R_{0II2}/I_{22}$$

8) 求取总的平衡校正量(U_1, U_2)。通过式(2)~式(5)可求得

$$U_1 = r_{11} + r_{12} \quad U_2 = r_{21} + r_{22}$$

2 数值仿真

2.1 Newmark-β 数值积分法

对于一般转子系统的线性运动微分方程,很难得到其精确的解析解,通常都是采用数值积分方法对其进行研究。其中当积分参数合适时,Newmark-β 方法是无条件稳定的^[14-15],同时具有算法相对简单、精度较高等特点。因此本文将采用该方法分别对双盘和三盘模型计算其各阶临界转速下转子系统瞬态响应,对上述提出的动平衡方法进行验证。

2.2 双盘转子模型仿真

双盘转子模型如图 2 所示,假设转子支承各向同性,支承为刚性支承。由于是仿真计算,故测量面直接选取在盘位置,使得测量面与平衡面位置重合;柔性转子系统的不平衡主要是由两个盘

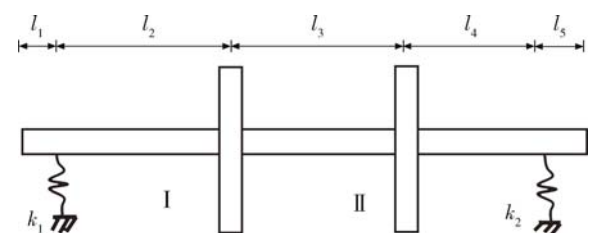


图 2 双盘转子模型

Fig. 2 Two-disk rotor model

的不平衡所引起的,轴上的不平衡忽略不计.转子系统各部件参数如表 1 所示,表中各部件的材料密度 $\rho=7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.轴段可以认为是 Timoshenko 梁.

利用 1.2 节所述的动平衡方法,分别在盘 1 上加试重 $55 \text{ g} \cdot \text{cm} \angle 0^\circ, 55 \text{ g} \cdot \text{cm} \angle 120^\circ$,盘 2 上加试重 $40 \text{ g} \cdot \text{cm} \angle 0^\circ, 40 \text{ g} \cdot \text{cm} \angle 120^\circ$,以加速度 $\ddot{\phi}=40 \text{ rad/s}^2$ 起动转子,得到两盘瞬态响应如图 3 所示,前 2 阶峰值的不平衡量如表 2 所示.

表 1 双盘转子模型参数
Table 1 Two-disk rotor model parameters

部件	参数
轴	$l_1=l_5=0.01 \text{ m}, l_2=0.18 \text{ m},$ $l_3=0.2 \text{ m}, l_4=0.16 \text{ m}$
盘	直径: $D_1=0.15 \text{ m}, D_2=0.09 \text{ m},$ 质量: $m_1=4 \text{ kg}, m_2=1.5 \text{ kg}$ 等效阻尼: $c_{e1}=c_{e2}=21 \text{ (N} \cdot \text{s)/m}$
支承	$k_{1x}=k_{1y}=5.5 \times 10^5 \text{ N/m},$ $k_{2x}=k_{1y}=7 \times 10^5 \text{ N/m}$
偏心	$e_1=55 \mu\text{m} \angle 36^\circ, e_2=40 \mu\text{m} \angle 45^\circ$

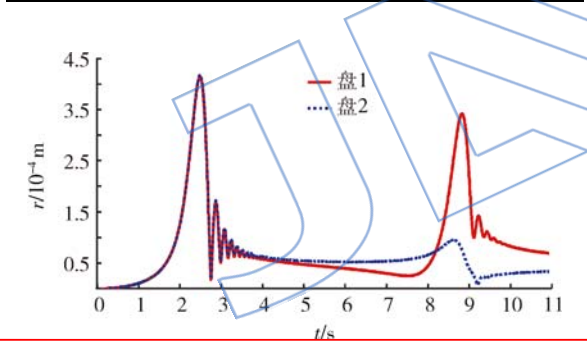


图 3 平衡面处前 2 阶瞬态响应

Fig. 3 First two-critical transient response of balance planes

表 2 双盘转子不平衡识别
Table 2 Unbalance identification of two-disk rotor

位置	盘 1		盘 2	
	1 阶	2 阶	1 阶	2 阶
$U_{i0}/\mu\text{m}$	4.17	3.43	4.20	0.96
$U_{i1}/\mu\text{m}$	7.79	6.44	7.85	2.03
$U_{i2}/\mu\text{m}$	6.48	4.04	6.53	1.30
轻点到圆心的距离/ μm	1.30	2.44	1.32	0.82
$U_{ij}/(\mu\text{m} \angle (^\circ))$	4.17 $\angle 224$	3.08 $\angle 196$	4.20 $\angle 224$	0.92 $\angle 197$

取前 2 阶临界峰值进行不平衡量识别,通过式(4)计算得到盘 1、盘 2 上各阶不平衡量,并通过式(4)求得所加总试重见表 3,最后得到平衡前后的瞬态响应比较,见图 4、图 5.

$$\gamma = \frac{R_{ij}}{R_{i0}} = \frac{U_{ij}}{U_{i0}} \quad i = \text{I, II} \quad j = 1, 2$$

表 3 双盘转子不平衡试重计算

Table 3 Unbalance trial weight calculation of two-disk rotor

参数	盘 1		盘 2	
	1 阶	2 阶	1 阶	2 阶
γ	1.00	0.90	1.00	0.95
$U_{i0}/(\text{g} \cdot \text{cm})$	55	55	40	40
$U_{ij}/(\text{g} \cdot \text{cm} \angle (^\circ))$	$55 \angle 224$	$49.5 \angle 196$	$40 \angle 224$	$38 \angle 197$
$r_{ij}/(\text{g} \cdot \text{cm} \angle (^\circ))$	$27.5 \angle 224$	$24.5 \angle 196$	$20 \angle 224$	$19 \angle 197$
$W_{ij}/(\text{g} \cdot \text{cm} \angle (^\circ))$	$52.7 \angle 211$		$38 \angle 212$	

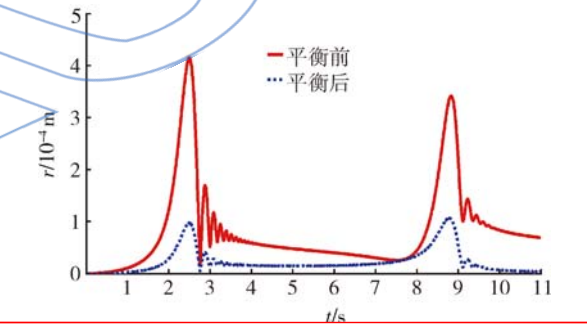


图 4 盘 1 平衡前后的瞬态响应

Fig. 4 Transient response on disk 1 before and after balancing

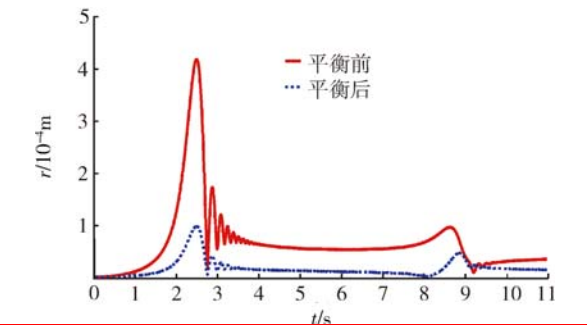


图 5 盘 2 平衡前后的瞬态响应

Fig. 5 Transient response on disk 2 before and after balancing

2.3 三盘转子模型仿真

为进一步验证所提出的瞬态平衡方法,在双盘模型的基础上以及相同的前提条件下建立如图 6 所示的三盘转子模型,参数见表 4,表中各部件的材料密度 $\rho=7.8\times10^3\text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E=2.1\times10^{11}\text{ N/m}^2$.以同样的瞬态动平衡方法进行模拟仿真,平衡面 I,II,III 分别选择在盘 1、盘 2 和盘 3 上.

与双盘转子模型类似,在盘 1 上加试重 $40\text{ }\mu\text{m}\angle0^\circ$, $40\text{ }\mu\text{m}\angle120^\circ$,盘 2 上加试重 $50\text{ }\mu\text{m}\angle0^\circ$, $50\text{ }\mu\text{m}\angle120^\circ$,盘 3 上加试重 $60\text{ }\mu\text{m}\angle0^\circ$, $60\text{ }\mu\text{m}\angle120^\circ$,以相同的角加速度起动转子,计算各盘前 3 阶瞬态响应,通过上式计算得到盘 1、盘 2、盘 3 各阶不平衡量,并通过式(4)求得所加总试重.不平衡量的计算见表 5、表 6,平衡前后平衡面上的瞬态响应比较见图 8~图 10.

图 4~图 5,图 8~图 10 分别给出了两例模型平衡前后平衡面的瞬态响应比较.从图中可以很清楚地看到,平衡后的残余振动引起的各阶不

平衡量均能控制在一个较小的振动范围中,临界振幅不平衡量较大峰值(双盘模型表现在 1 阶临界转速上,三盘模型表现在 3 阶临界转速上)的下降最低在 60%以上,普遍下降达到 80%左右,同

表 4 三盘转子模型主要参数
Table 4 Main parameters of three-disk rotor model

部件	参数
轴段	$l_1=l_6=0.01\text{ m}$, $l_2=0.16\text{ m}$, $l_3=0.22\text{ m}$, $l_4=l_5=0.18\text{ m}$ 直径: $D_1=D_2=D_3=0.2\text{ m}$,
轮盘	质量: $m_1=m_2=m_3=7.35\text{ kg}$, 三盘处的等效阻尼: $c_{e1}=c_{e2}=c_{e3}=60\text{ N}\cdot\text{s/m}$
支承	$k_{1x}=k_{1y}=5.5\times10^5\text{ N/m}$, $k_{2x}=k_{2y}=5.0\times10^5\text{ N/m}$
初始偏心	$e_1=40\text{ }\mu\text{m}\angle45^\circ$ $e_2=50\text{ }\mu\text{m}\angle60^\circ$ $e_3=60\text{ }\mu\text{m}\angle36^\circ$

表 5 三盘转子的不平衡识别
Table 5 Unbalance identification of three-disk rotor

编号	盘 1			盘 2			盘 3		
	1 阶	2 阶	3 阶	1 阶	2 阶	3 阶	1 阶	2 阶	3 阶
$U_{i0}/\mu\text{m}$	1.4055	0.731	2.665	2.231	0.713	3.31	1.5781	1.315	3.58
$U_{i1}/\mu\text{m}$	2.593	1.627	4.485	4.111	1.331	5.88	2.895	2.372	6.068
$U_{i2}/\mu\text{m}$	2.295	1.102	2.694	3.644	1.125	2.787	2.568	1.666	3.6249
轻点到圆心的距离/ μm	0.2715	0.579	1.841	3.644	1.125	2.787	0.301	0.595	2.469
$U_{ij}/$ ($\text{g}\cdot\text{cm}\angle^\circ$)	1.432 $\angle229$	0.93 $\angle202$	1.85 $\angle194$	2.27 $\angle229$	0.72 $\angle224$	2.57 $\angle179$	1.59 $\angle229$	1.12 $\angle210$	2.59 $\angle192$

表 6 三盘转子不平衡试重计算
Table 6 Unbalance trial weight calculation of three-disk rotor

参数	盘 1			盘 2			盘 3		
	1 阶	2 阶	3 阶	1 阶	2 阶	3 阶	1 阶	2 阶	3 阶
γ	1.019	1.272	0.694	1.017	1.01	0.776	1.008	0.852	0.723
$U_{i0}/(\text{g}\cdot\text{cm})$	40	40	40	50	50	50	60	60	60
$U_{ij}/$ ($\text{g}\cdot\text{cm}\angle^\circ$)	40.76 $\angle229$	50.88 $\angle215$	27.76 $\angle205$	52.85 $\angle229$	52.5 $\angle227$	41.8 $\angle200$	63.48 $\angle229$	56.12 $\angle210$	47.38 $\angle192$
$r_{ij}/$ ($\text{g}\cdot\text{cm}\angle^\circ$)	13.59 $\angle229$	16.96 $\angle215$	9.25 $\angle205$	17.62 $\angle229$	17.5 $\angle227$	13.93 $\angle200$	21.16 $\angle229$	18.71 $\angle210$	15.8 $\angle192$
$W_{ij}/\mu\text{m}\angle^\circ$	39.3 $\angle217$			46.88 $\angle220$			53.8 $\angle214$		

时在工作转速中,即过临界转速后的稳定区中的振幅远远小于初始振幅。

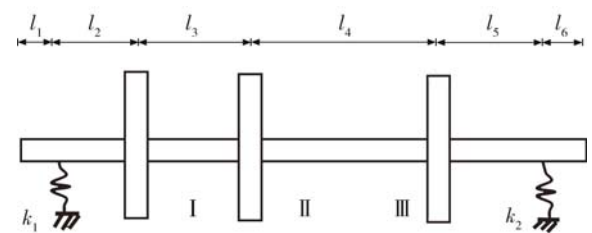


图6 三盘转子模型

Fig. 6 Three-disk rotor model

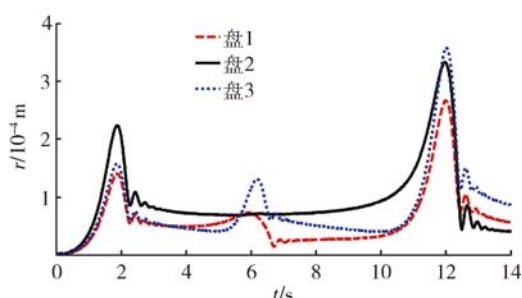


图7 平衡面处前3阶瞬态响应图

Fig. 7 First three-critical transient response of balance planes

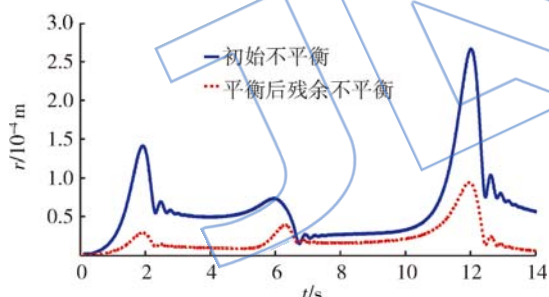


图8 盘1平衡前后瞬态响应

Fig. 8 Transient response on disk 1 before and after balancing

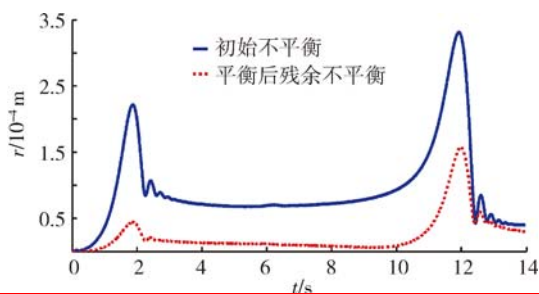


图9 盘2平衡前后瞬态响应

Fig. 9 Transient response on disk 2 before and after balancing

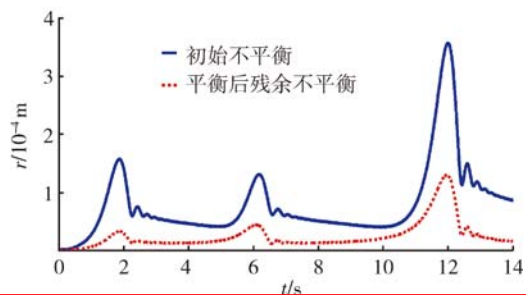


图10 盘3平衡前后瞬态响应

Fig. 10 Transient response on disk 3 before and after balancing

3 结 论

本文在升速响应模态平衡技术的基础上,提出了一种平衡量重新调配的新动平衡方法,并对该方法过程进行了详细介绍.两例数值仿真平衡结果都说明了该方法的有效性.总结该方法主要有以下几个特点:

- 1) 起车次数少.与传统的三圆平衡法比较,只要3次起车即可完成柔性转子系统多阶不平衡的识别与平衡.
- 2) 所需起车升速过程的测量信息少.只需要测量起车过程中的过临界振幅信息即可,大大简化了实时检测程序以及平衡计算过程,提高了平衡效率.
- 3) 有效控制并降低柔性转子系统越过临界转速时的各阶临界振幅,普遍下降达到80%左右,下降最低也在60%以上,并有效降低稳态工作时的振幅.
- 4) 动平衡稳定性更好.本文方法在多盘转子上的高阶平衡效果依然很好,也大大增加了本文动平衡方法的实际应用范围.

参考文献:

- [1] Parkinson A G. Balancing of rotating machinery[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1991, 205(1): 53-66.
- [2] Foiles W C, Allaire P E, Gunter E J. Review: rotor balancing[J]. Shock and Vibration, 1998, 5(5): 325-336.
- [3] LIU Shi, QU Liangsheng. A new field balancing method of rotor systems based on holospectrum and genetic algorithm[J]. Applied Computing, 2008, 8(1): 446-455.
- [4] Wierschem N E, Quinn D D, Hubbard S A, et al. Passive damping enhancement of a two-degree-of-freedom system through a strongly nonlinear two-degree-of-freedom attachment[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(25): 5393-5407.

- [5] KANG Yuan, Lin T W, Chang Y J, et al. Optimal balancing of flexible rotors by minimizing the condition number of influence coefficients[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(7): 891-908.
- [6] Pennacchi P, Chatterton S, Ricci R. Rotor balancing using high breakdown-point and bounded-influence estimators[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010, 24(3): 860-872.
- [7] Den Hartog J P. Mechanical vibrations[M]. New York: Mcgraw-Hill, 1956.
- [8] Blake M P, Mitchell W S. Vibration and acoustic measurement handbook[M]. New York: Spartan Books, 1972.
- [9] Carlson P O L. Four run balancing without phase[C] // Proceedings of Machinery Vibration Monitoring and Analysis Seminar and Meeting. New York: ASME, 1979: 411-418.
- [10] 徐芳麟, 晏砺堂, 宋兆泓. 介绍一种整机全速平衡法: 三圆平衡法[J]. 材料试验机, 1980(2): 1-14.
- [11] Rodrigues D J, Champneys A R, Friswell M I, et al. Two-plane automatic balancing: a symmetry breaking analysis[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011, 46(9): 1139-1154.
- [12] 黄金平, 任兴民. 一种识别单盘柔性转子不平衡的新方法[J]. 航空动力学报, 2008, 23(2): 293-298.
- HUANG Jinping, REN Xingmin. A novel method of identifying the imbalance of flexible rotor with one disc[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(2): 293-298. (in Chinese)
- [13] 黄金平. 基于加速响应信息的柔性转子瞬态动平衡研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2009.
- HUANG Jinping. Research on transient balancing of flexible rotor based on the accelerating response data[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2009.
- [14] Rubin M B. A simplified implicit Newmark integration scheme for finite rotations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(2): 219-231.
- [15] Roy D, Dash M K. Explorations of a family of stochastic Newmark methods in engineering dynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(45): 4758-4796.